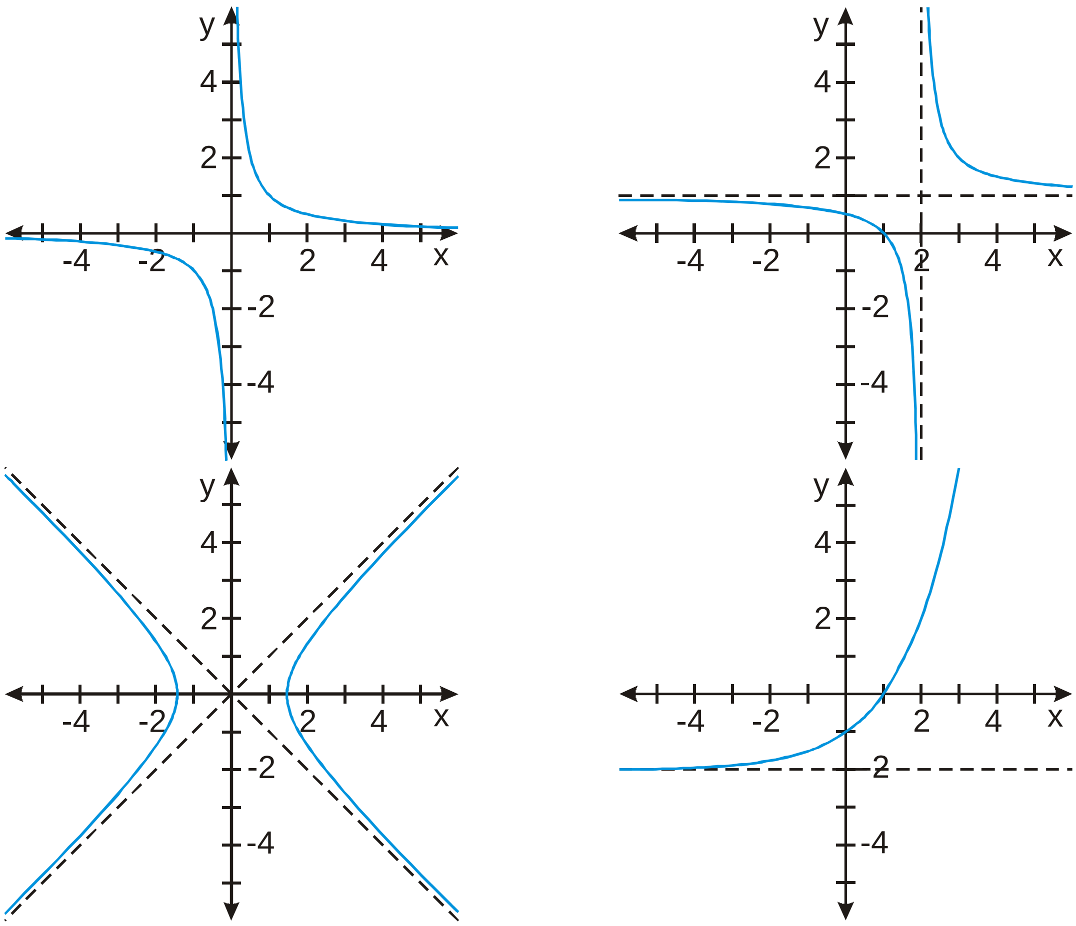
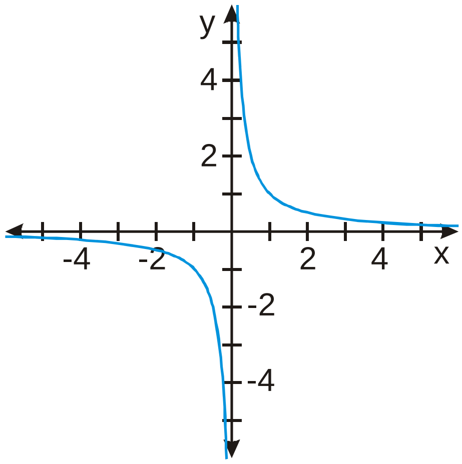
10.1.13 Asymptoty grafu funkce

Předpoklady: 1110, 1111

Asymptoty grafu už známe – kreslili jsme si je jako přímky, ke kterým se graf funkce přibližuje. Nakreslení asymptot, pak umožňuje přesnější kreslení grafu. Například u hyperbol jsme kreslili asymptoty jako první.

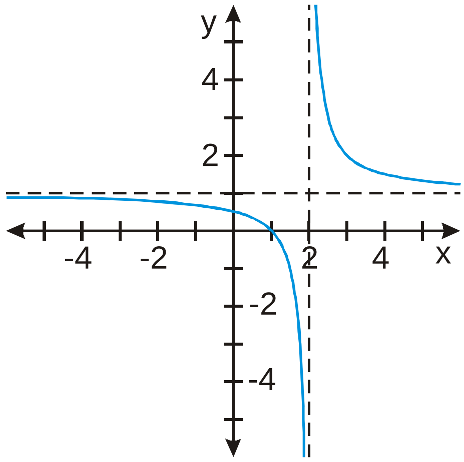
Př. 1: Najdi na grafech následujících funkcí asymptoty. Asymptoty je možné rozdělit do dvou skupin. Zkus takové dělení vymyslet a asymptoty do dvou skupin rozdělit.





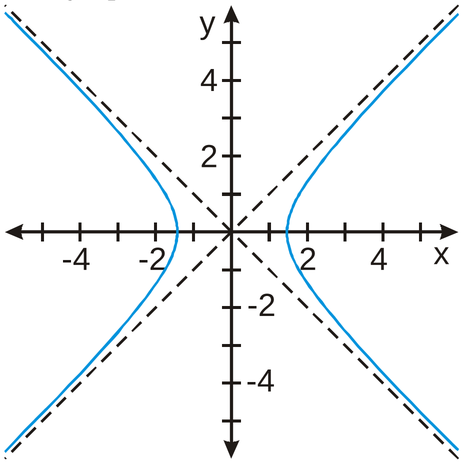
pro x jdoucí k $\pm\infty$ se hodnoty funkce přibližují nule $\Rightarrow$ asymptota $y = 0$

pro x jdoucí k 0 se hodnoty funkce přibližují $\pm\infty$ $\Rightarrow$ asymptota $x = 0$



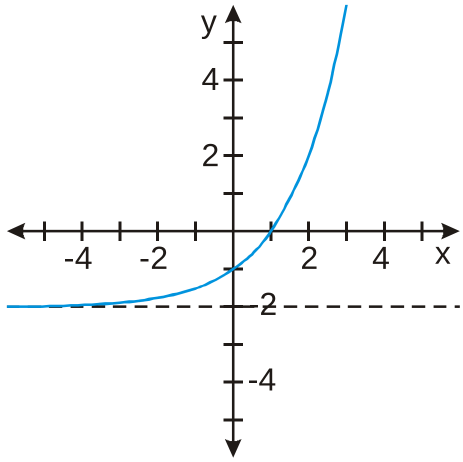
pro x jdoucí k $\pm\infty$ se hodnoty funkce přibližují 1 $\Rightarrow$ asymptota $y = 1$

pro x jdoucí k 2 se hodnoty funkce přibližují $\pm\infty$ $\Rightarrow$ asymptota $x = 2$



na obrázku není graf funkce

pro x jdoucí k $\pm\infty$ se hodnoty funkce přibližují $\pm\infty$ $\Rightarrow$ asymptoty $y = \pm x$



pro x jdoucí k $-\infty$ se hodnoty funkce přibližují -2 $\Rightarrow$ asymptota $y = -2$

Asymptoty bychom mohli roztřídit do dvou skupin:

- asymptoty, ke kterým se graf funkce blíží, když se x blíží k $\pm\infty$. Tyto asymptoty jsou přímky vodorovné nebo šikmé, vždy jde o graf lineární funkce $\Rightarrow$ **asymptoty se směrnicí grafu funkce *f***
- asymptoty, ke kterým se graf funkce blíží, když se x blíží k nějakému číslu a. Tyto asymptoty jsou svislé přímky dané rovnicí $x = a$ $\Rightarrow$ **asymptoty bez směrnice grafu funkce *f***

Pedagogická poznámka: Studentům činí problém nalézt třídící kritérium. Myslím, že nemá cenu hledání příliš prodlužovat.

Asymptoty bez směrnice grafu funkce *f*

- jsou vždy kolmé na osu x $\Rightarrow$ s grafem funkce se nikdy neprotínají
- graf funkce se k nim blíží, když se hodnoty proměnné x blíží k nějakému číslu a

Definice:

Nechť je funkce definována v $\mathbf{R}_\delta(a)$ (případně v $\mathbf{R}_\delta^+(a)$ nebo $\mathbf{R}_\delta^-(a)$). Přímka o rovnici $x = a$ se nazývá **asymptota bez směrnice grafu funkce *f***, právě když má funkce *f* v bodě *a* aspoň jednu jednostrannou nevlastní limitu.

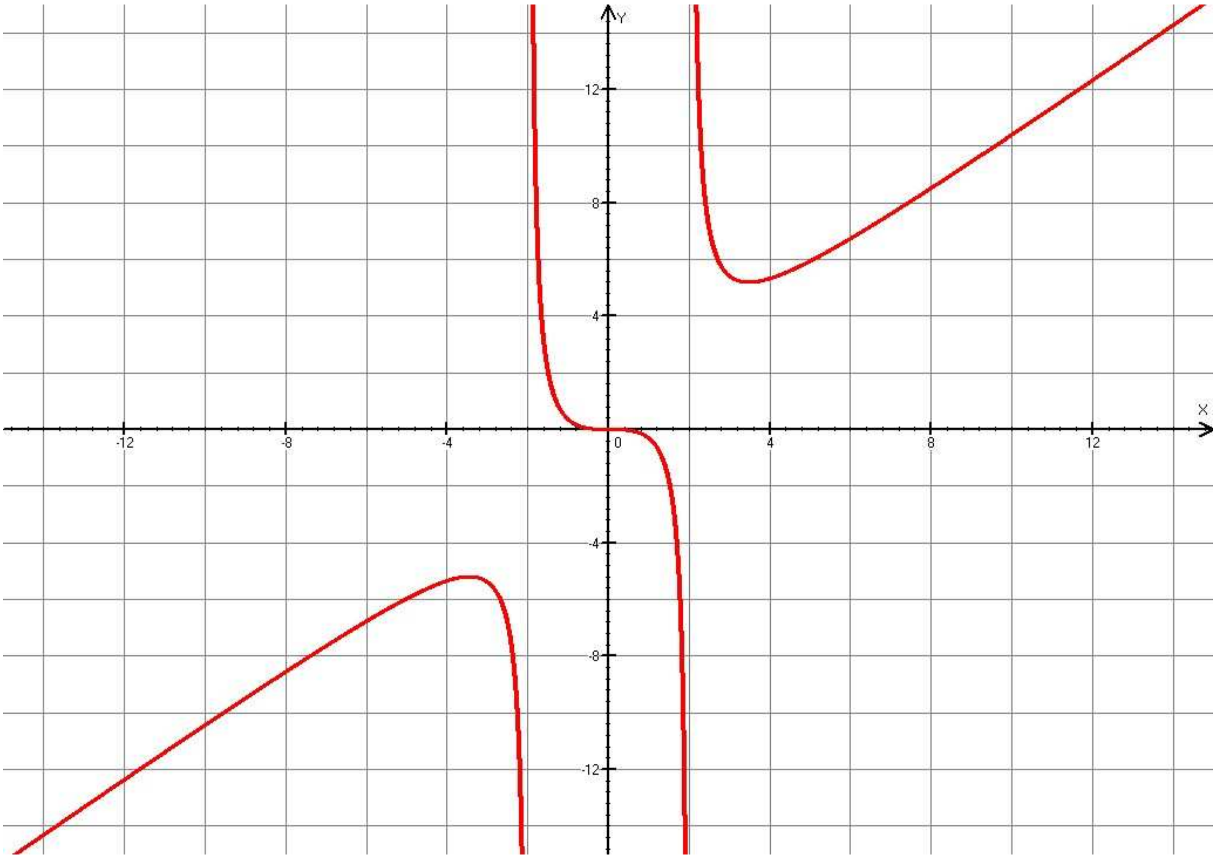
Jak najdeme asymptoty bez směrnice pro funkce *f*?
Stačí když najdeme body, kde má funkce nevlastní limity ve vlastním bodě (většinou body, kde není definována).

Př. 2: Najdi asymptoty bez směrnice pro funkci $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

Hledáme body, kde funkce není definována (tam je šance na nevlastní limitu ve vlastním bodě a tím i asymptotu bez směrnice).
Funkce obsahuje zlomek $\Rightarrow$ jmenovatel musí být různý od nuly
$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x \neq -2$, $x \neq 2$
$D(f) = R - \{-2; 2\}$

- zjišťujeme $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4}$:
  Zkusíme $x = 2,01$: $y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{2,01^3}{2,01^2 - 2^2}$ $\Rightarrow$ kladná čísla dělíme velmi malými kladnými čísly $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$ $\Rightarrow$ funkce má asymptotu bez směrnice $x = 2$ (limitu z druhé strany nemá cenu zjišťovat)
- zjišťujeme $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4}$:
  Zkusíme $x = -1,99$: $y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{(-1,99)^3}{(-1,99)^2 - 2^2}$ $\Rightarrow$ záporná čísla dělíme zápornými čísly s malou absolutní hodnotou $\Rightarrow$ $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$ $\Rightarrow$ funkce má asymptotu bez směrnice $x = -2$ (limitu z druhé strany nemá cenu zjišťovat)

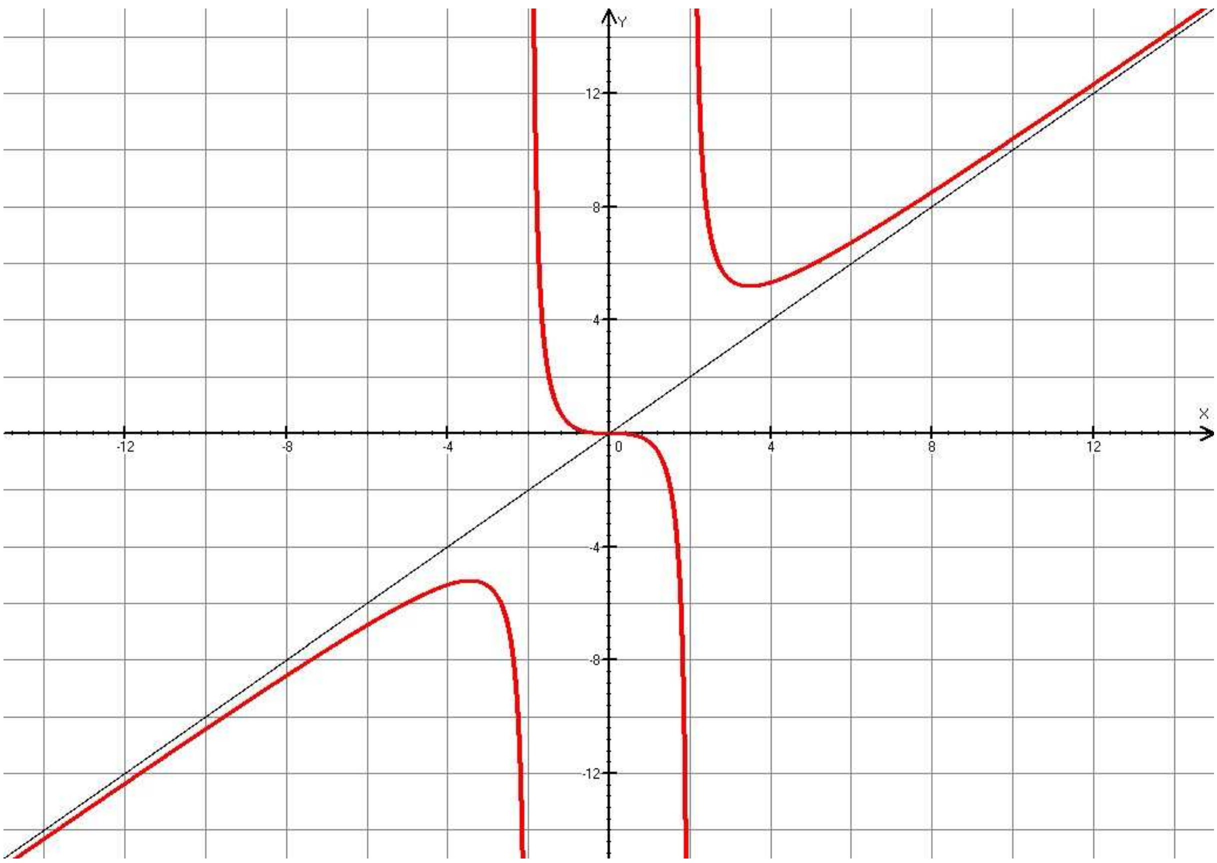
Výsledek si můžeme ověřit pomocí grafu nakresleného počítačem:



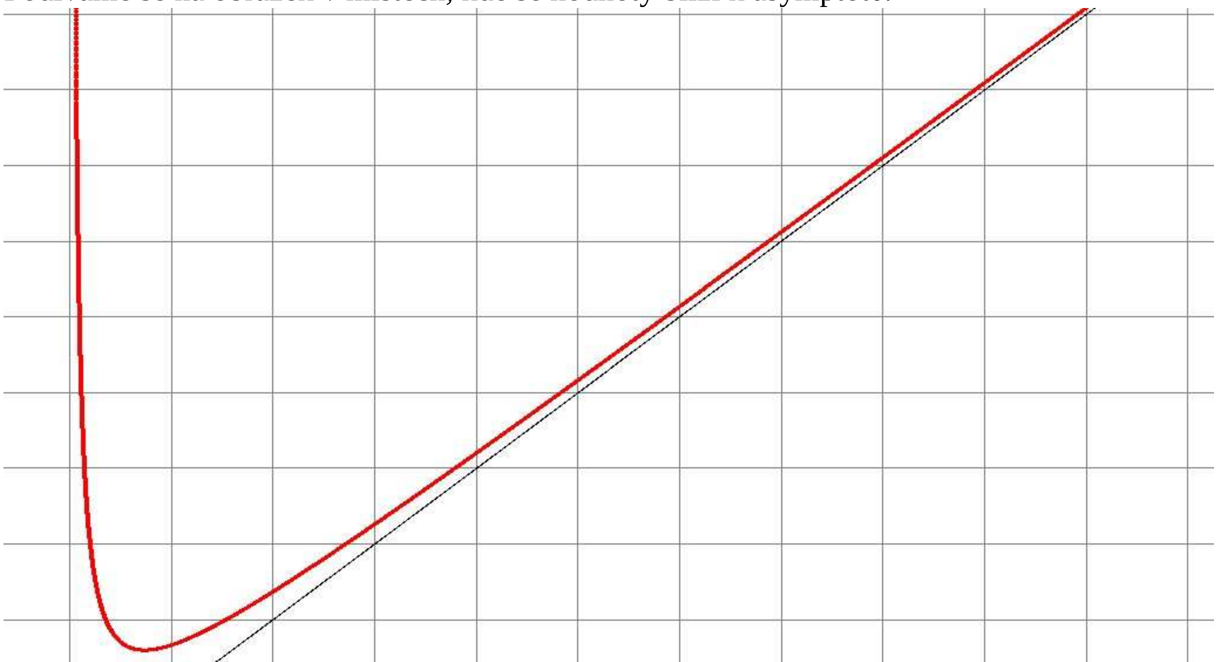
Př. 3: Prostuduj obrázek grafu funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ a rozhodni zda má funkce asymptotu se směrnicí. Odhadni její rovnici.

Z obrázku se zdá, že graf funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ se pro *x* blížící se k $\pm\infty$ chová podobně jako přímka $y = x$.

Přidáme do obrázku funkci $y = x$:



Zdá se, že jsme se trefili. Jak přesně definovat asymptotu se směrnicí pro funkci?
Podíváme se na obrázek v místech, kde se hodnoty blíží k asymptotě:



Jak se pozná, že se funkce blíží k asymptotě?

S rostoucím *x* se zmenšuje rozdíl mezi hodnotou funkce a hodnotou asymptoty $f(x)-(ax+b)$.

Podobně jako u limity musíme zajistit, aby asymptota byla pro funkci „nejbližší" přímkou $\Rightarrow$ vzdálenost mezi grafem a přímkou musí jít k nule: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

$\Rightarrow$ **Definice:**

Přímku $y=ax+b$ nazýváme **asymptotou se směrnicí grafu funkce *f*, jestliže** $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ nebo $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

Jak určíme asymptotu nějaké funkce (tedy hodnoty koeficientů *a* a *b*)?

Definice: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ není úplně ideální (ve výrazu jsou oba koeficienty, což je na určení koeficientů z jedné rovnice příliš mnoho).

vydělíme limitu číslem *x*:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a+\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to+\infty}a+\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-a+0=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ - teď už máme vztah pro koeficient *a*

Jakmile určíme koeficient *a* můžeme určit koeficient *b* z původní limity

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]-\lim_{x\to+\infty}b=0 \Rightarrow b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$$

Rovnici asymptoty $y=ax+b$ určíme ve dvou krocích:

- $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
- $b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$

Př. 4: Urči pomocí předchozího postupu asymptotu funkce $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-4\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-4}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-4}-\frac{x^3-4x}{x^2-4}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4x}{x^2-4}\right]=$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

Limity pro $x\to-\infty$ počítat nebudeme, vyšly by stejně $\Rightarrow$ asymptotou funkce $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ je přímka $y=x$.

Pedagogická poznámka: Následující příklady při hodině spíše nestihneme, každopádně je studenti mají doma k nahlédnutí.

Př. 5: Urči asymptoty funkce $y=\frac{3x^2+2x}{x+2}$.

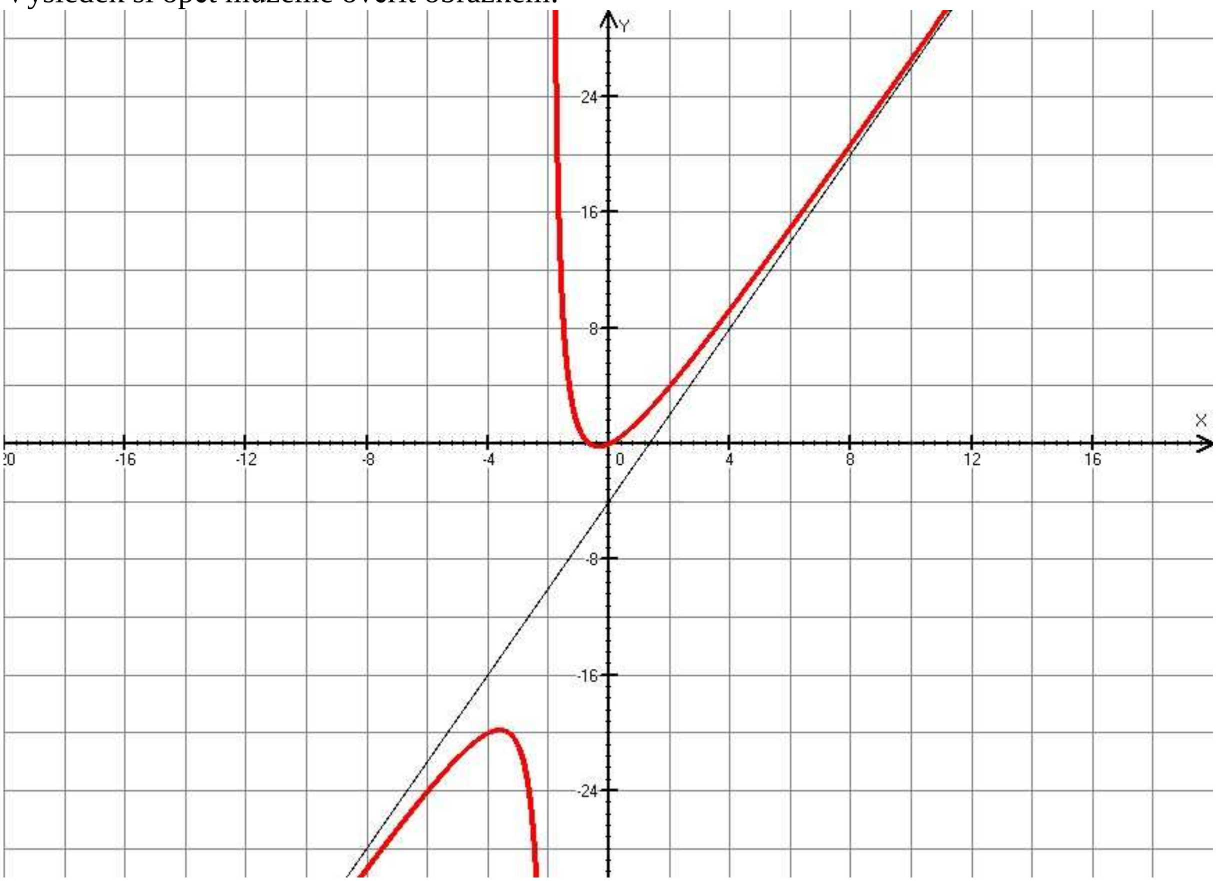
$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2+2x}{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+2\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2+2x}{x+2}-3\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2+2x}{x+2}-\frac{3x^2+6x}{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4x}{x+2}\right]=$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{1+\frac{0}{x}}=\frac{-4}{1+0}=-4$$

asymptotou funkce $y=\frac{3x^2+2x}{x+2}$ je přímka $y=3x-4$.

Výsledek si opět můžeme ověřit obrázkem:



Př. 6: Urči asymptoty funkce $y=\dfrac{x-1}{2x+3}$.

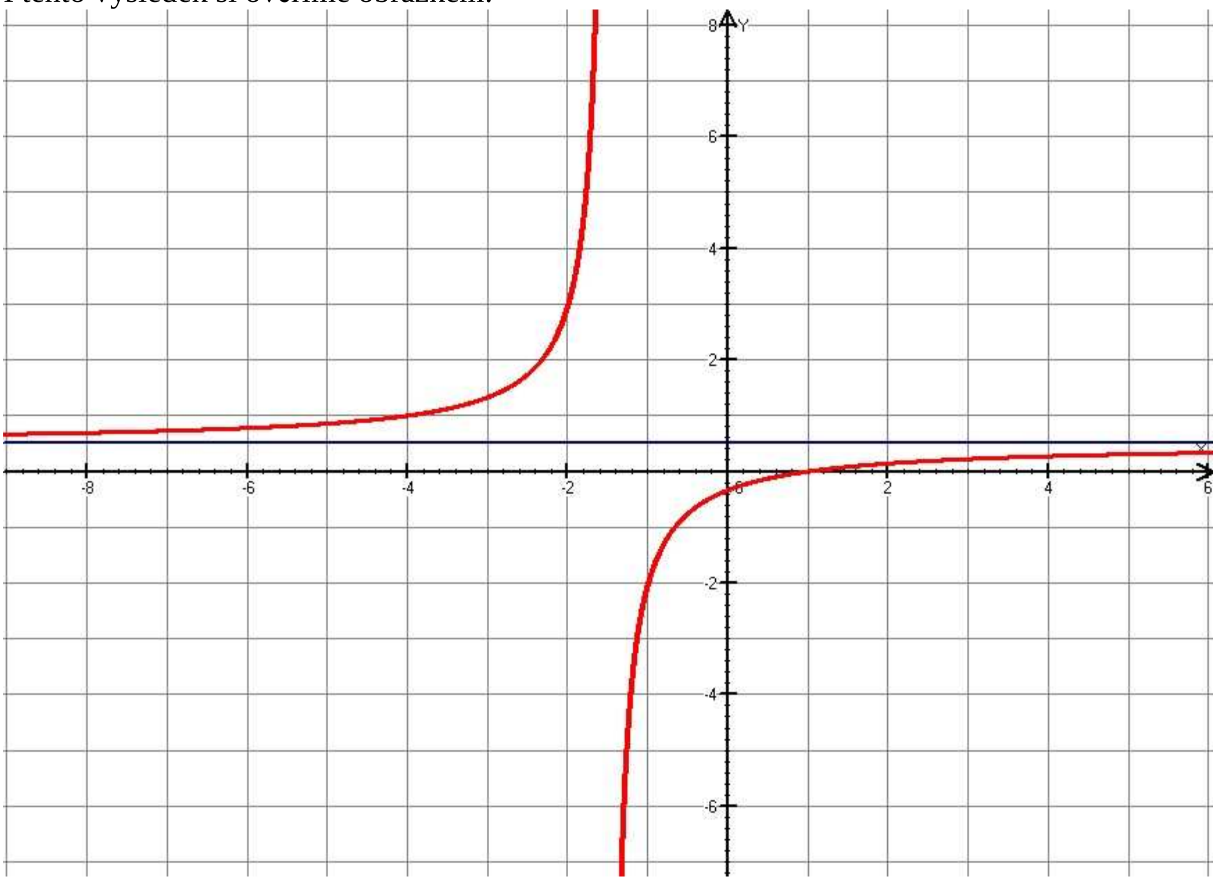
$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-1}{2x+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x^2+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{2\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{0-0}{2+0}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{2x+3}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{2\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$

$$b=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

asymptotou funkce $y=\dfrac{x-1}{2x+3}$ je přímka $y=\dfrac{1}{2}$.

I tento výsledek si ověříme obrázkem:



Př. 7: Petáková:
strana 155/cvičení 15 c) e)

Shrnutí: Pomocí limit můžeme určit rovnice asymptot funkce.